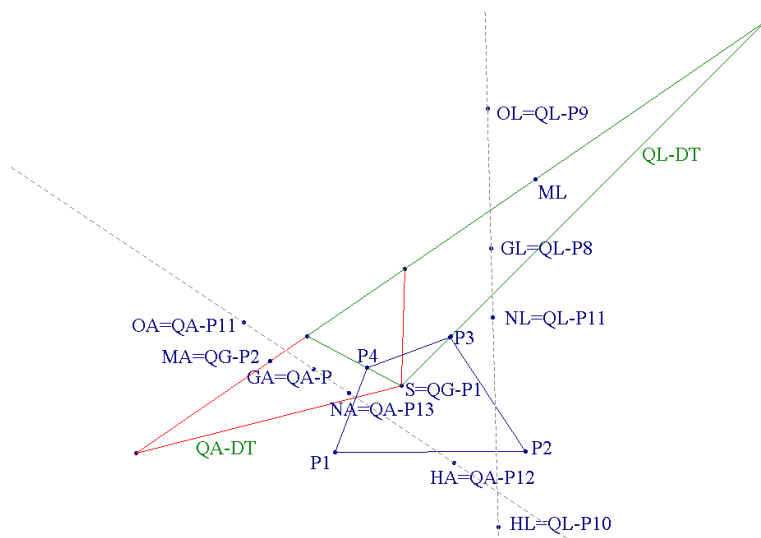


Ortslinien für EQF -Viereckpunkte I

Eckart Schmidt

Zu Punkten der „Encyclopedia of Quadri Figures“ (EQF) von Chris van Tienhoven [1] werden Ortslinien aufgezeigt. Dazu werden Vierecke mit gleichem Diagonal-Dreieck ($QA-DT$) und gleichem Diagonalen-Dreieck ($QL-DT$) betrachtet. Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten dieser Dreiecke.



Bezeichnungen

Ein Viereck im engeren Sinne wird bei Chris van Tienhoven [1] als Quadrignon (QG) angesprochen, bestehend aus vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und vier Geraden $L_1=P_1P_2, L_2=P_2P_3, L_3=P_3P_4, L_4=P_4P_1$. Daneben werden die Bezeichnungen Quadrangle (QA) für vier Punkte (ungeordnet) und Quadrilateral (QL) für vier Geraden (ungeordnet) benutzt. Jedes Quadrignon kann als Quadrangle und als Quadrilateral betrachtet werden. Hier werden Quadrignons betrachtet, die das gleiche Diagonal-Dreieck $QA-DT$ und das gleiche Diagonalen-Dreieck $QL-DT$ haben. Für die folgenden Punkte dieser Dreiecke seien die EQF -Bezeichnungen [1] abgekürzt:

	$QA-DT$	$QL-DT$
Schwerpunkt	$G_A=QA-P10$	$G_L=QL-P8$
Umkreismitte	$O_A=QA-P11$	$O_L=QL-P9$
Höhenschnitt	$H_A=QA-P12$	$H_L=QL-P10$
Neun-Punkte-Zentrum	$N_A=QA-P13$	$N_L=QL-P11$

Die beiden Dreiecke $QA-DT$ und $QL-DT$ eines Quadrignons stimmen im Diagonalschnitt des Vierecks

$$S=QG-P1$$

– hier als Scheitel bezeichnet – und der Gegenseitengerade $QG-LI$ – hier als Basis angesprochen – überein. Die Basismitten seien

$$M_A (=QG-P2) \text{ und } M_L (=QG-P3).$$

Wählt man das Diagonal-Dreieck $QA-DT$ als Bezugsdreieck, so ist zu jeder QG -Ecke P_i das Restdreieck $P_jP_kP_l$ das Anti-Ceva-Dreieck. Damit ist ein Viereck durch eine Ecke bestimmt, so dass folgende Koordinatendarstellung möglich wird:

$$P_1(-p:q:r), \quad P_2(p:-q:r), \quad P_3(p:q:-r), \quad P_4(p:q:r).$$

Der Scheitel S sei Punkt B des Bezugsdreiecks mit den Seitenlängen a, b, c .

Wählt man das Diagonalen-Dreieck $QL-DT$ als Bezugsdreieck, so ist mit jeder Seitengeraden L_i das Restdreieck $L_jL_kL_l$ bestimmt, so dass folgende Koeffizientendarstellung für die Geraden möglich wird:

$$L_1(-l:m:n), \quad L_2(l:-m:n), \quad L_3(l:m:-n), \quad L_4(l:m:n).$$

Der Scheitel S sei Punkt B dieses zweiten Bezugsdreiecks, dessen Seitenlängen ebenfalls mit a, b, c bezeichnet seien, auch wenn sie sich von denen des ersten Bezugsdreiecks unterscheiden.

Ortslinien von QA -Punkten

Benutzt wird das Diagonal-Dreieck $QA-DT$ als Bezugsdreieck. Variiert man die Koordinate q der Ecke $P_4(p:q:r)$, so haben alle zugehörigen QG -Vierecke das gleiche Diagonal-Dreieck $QA-DT$ und das gleiche Diagonalen-Dreieck $QL-DT$. Dabei bleiben die folgenden Punkte fest:

$$\begin{aligned} &S(0:1:0), \quad M_A(1:0:1), \quad M_L(p^2:0:-r^2) \\ &G_A(1:1:1), \quad G_L(2p^2:p^2-r^2:-2r^2), \\ &O_A(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C), \quad O_L(p^2(S^2+S_AS_B)+r^2a^2S_C \\ &\quad :b^2(p^2c^2-r^2a^2):-r^2(S^2+S_BS_C)-p^2c^2S_A), \\ &H_A(S_BS_C:S_CS_A:S_AS_B), \quad H_L(S_C:\frac{-p^2S_A^2+r^2S_C^2}{p^2c^2-r^2a^2}:S_A), \\ &N_A(S^2+S_BS_C:S^2+S_CS_A:S^2+S_AS_B), \\ &N_L(-p^2(3S^2-S_AS_B)+r^2a^2S_C:-p^2(S^2-S_A^2)+r^2(S^2-S_C^2) \\ &\quad :r^2(3S^2-S_BS_C)-p^2c^2S_A). \end{aligned}$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen S_A, S_B, S_C, S mit

$$\begin{aligned} 2S_A &= -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2, \\ S^2 &= S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A = 4\Delta^2. \end{aligned}$$

Die obigen gängigen Dreieckspunkte werden zur Beschreibung der weiteren Zusammenhänge benutzt. Damit wird Viereckgeometrie auf die Geometrie der Dreiecke $QA-DT$ und $QL-DT$ zurückgeführt.

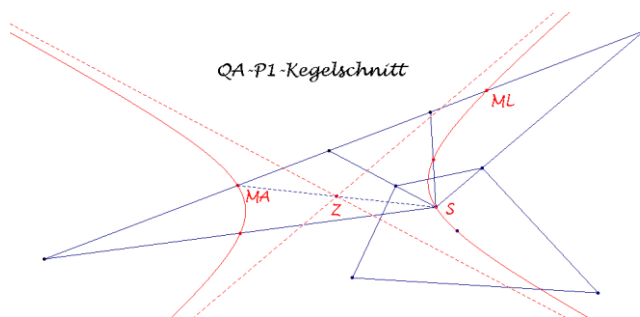
In diesem Abschnitt werden Ortslinien von QA -Punkten angesprochen. Dabei wird auf die Geometrie dieser Punkte und ihre Koordinatendarstellung nicht weiter eingegangen, sondern auf den EQF -Katalog [1] verwiesen. Es werden nur Ortslinien höchstens zweiten Grades aufgeführt. Diese werden möglichst soweit beschrieben, dass ihre Gleichungen nachvollzogen werden können und eine Konstruktion möglich wird.

Berücksichtigt werden Punkte bis $QA-P38$.

QA-P1 Quadrangle Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den $QL-DT$ -Schenkeln –
Zentrum: Mitte SM_A – Punkte: S, M_A, M_L , Schenkelmitten von
 $QA-DT$

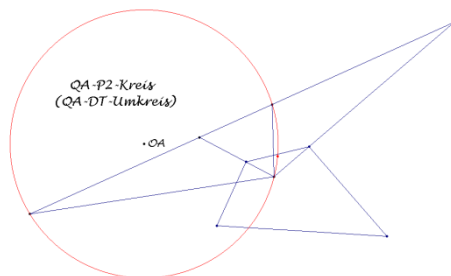
$$r^2x(x-y) + (p^2 - r^2)zx + p^2z(y-z) = 0$$



QA-P2 Euler-Poncelet Point

Umkreis von $QA-DT$ ($QA-Cil$)

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$



QA-P3 Gergonne-Steiner Point

Die Ortslinie ist das $QA-DT$ -isotome Bild eines Kegelschnitts mit der Gleichung

$$a^2 p^2 x^2 + b^2 (p^2 - r^2) y^2 - c^2 r^2 z^2 + (a^2 r^2 - c^2 p^2) (xy + yz + zx) + 2y(p^2 S_C x - r^2 S_A z) = 0$$

durch folgende 5 Punkte:

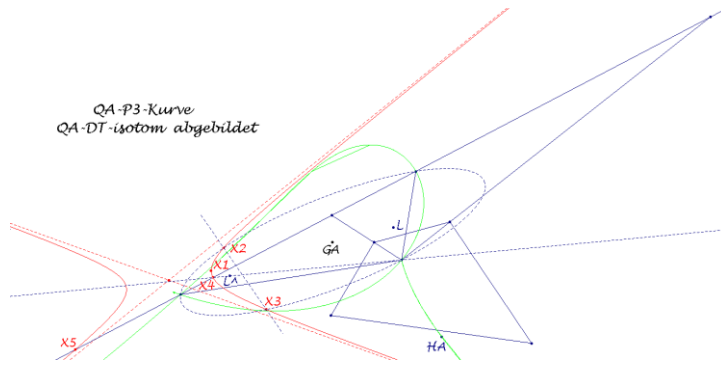
$X_1(S_A : S_B : S_C)$ $QA-DT$ -isotomes Bild von H_A ,

$X_{2,3}(r(p \pm r) : -pr : p(\pm p + r))$ $QA-DT$ -isotome Bilder der

Fernpunkte der $QL-DT$ -Schenkel,

$X_4(c^2 : 0 : a^2)$ Schnitt der Ecktransversale des *QA-DT*-isotomen Bildes des *QA-DT*-Lemoine-Punktes mit der Basisgeraden,

$X_5(r^2 : 0 : -p^2)$ Pol der Geraden X_2X_3 bzgl. der *QA-DT*-Steiner-Umellipse.



QA-P4 Isogonal Center

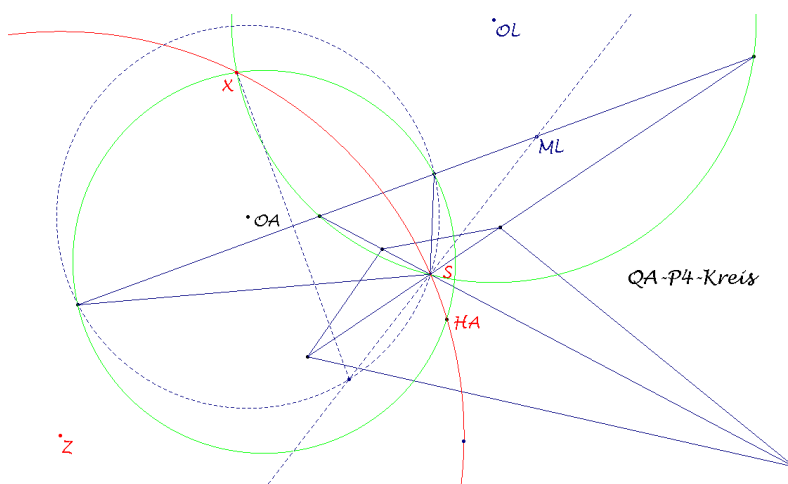
Kreis durch S , H_A und Hilfspunkt X . Punkt X ist die Spiegelung des zweiten Schnittpunktes der *QL-DT*-Seitenhalbierenden mit dem *QA-DT*-Umkreis an der Basisgeraden. Punkt X liegt in einem Schnitt des *QL-DT*-Umkreises mit einem Kreis über der *QA-DT*-Basis durch H_A .

$$2r^2a^2S_Ax^2 - 2p^2c^2S_Cz^2 + (S_A - S_C)(p^2c^2 + r^2a^2)zx + (p^2c^4 + r^2a^2(S_A - S_B))xy - (r^2a^4 - p^2c^2(S_B - S_C))yz = 0$$

$$\text{Mitte } Z_{QA-P4} (p^2c^2(S^2 + S_B S_C) + r^2a^4 S_A : (p^2c^2 - r^2a^2)(S^2 + S_C S_A) : -r^2a^2(S^2 + S_A S_B) - p^2c^4 S_C)$$

Hilfspunkt

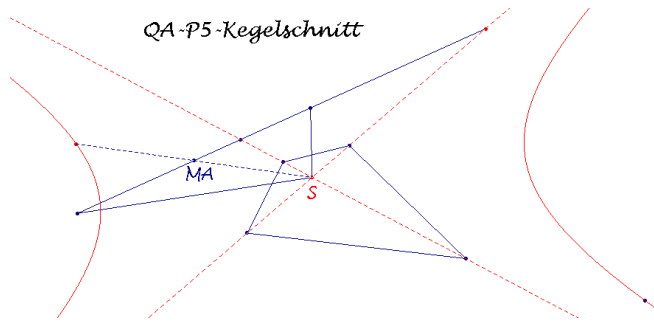
$$X(p^2(r^2(S_B - S_C) - p^2c^2) : p^2r^2b^2 : r^2(p^2(S_B - S_A) - r^2a^2))$$



QA-P5 Isotomic Center

Hyperbel – Asymptoten: Schenkelgeraden *QL-DT* – Zentrum S
– Punkte: Spiegelung von S an M_A

$$p^2(x^2 + y^2) - r^2(y^2 + z^2) + 2(p^2 - r^2)(xy + yz + zx) = 0$$



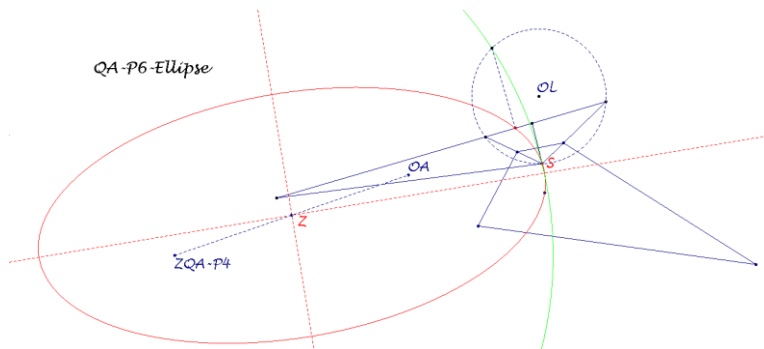
QA-P6 Parabola Axes Crosspoint

Ellipse – Achsen parallel zu den Winkelhalbierenden von $QL-DT$ in S – Zentrum in der Mitte von O_A und dem Mittelpunkt des $QA-P4$ -Kreises – Punkte: S und der Lotfußpunkt auf der Basisgeraden vom zweiten Schnitt von $QA-DT$ -Umkreis und $QA-P4$ -Kreis

$$r^4 a^2 (r^2 a^2 - p^2 S_B) x^2 - p^4 c^2 (p^2 c^2 - r^2 S_B) z^2 + p^2 r^4 a^2 S_A xy - p^4 r^2 c^2 S_C yz + p^2 r^2 (r^2 a^2 (c^2 + S_B) - p^2 c^2 (a^2 + S_B)) zx = 0$$

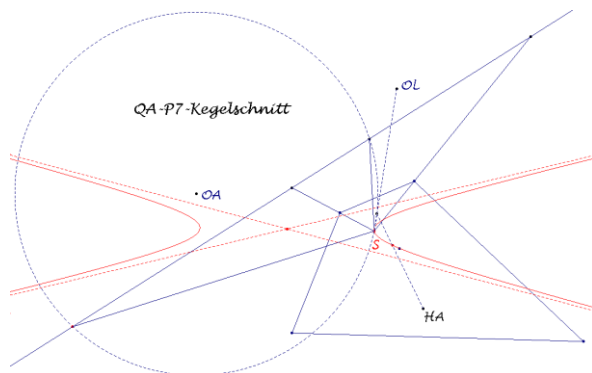
Zentrum $Z_{QA-P6} (p^2 c^2 : p^2 c^2 - r^2 a^2 : -r^2 a^2)$

Fußpunkt $(p^2 (r^2 S_B - p^2 c^2) : 0 : r^2 (-r^2 a^2 + p^2 S_B))$



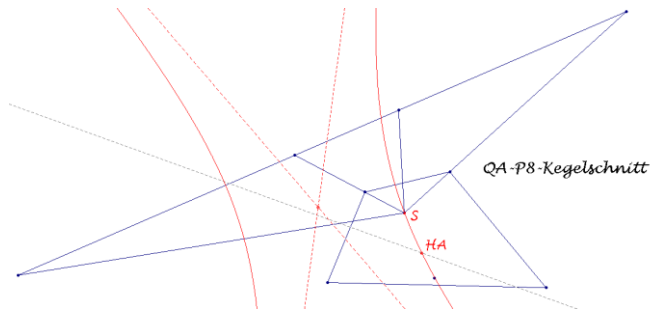
QA-P7 QA-Nine-point Homothetic Center

Hyperbel – Punkte: S , Teilpunkt $H_A X$ im Verhältnis 2:1 mit X zweiter Schnitt von SO_L mit $QA-DT$ -Umkreis, ...



QA-P8 Midray Homothetic Center

Hyperbel – Punkte: S, H_A, \dots



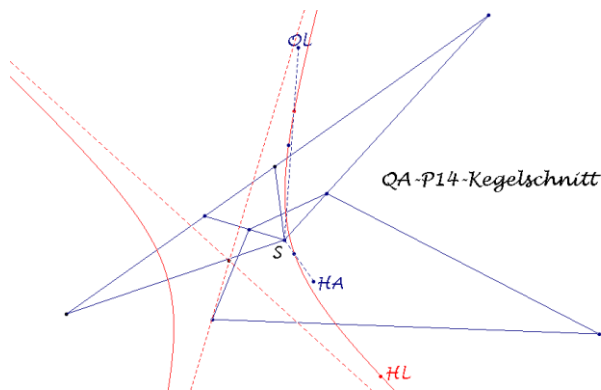
QA-P10, 11,12, 13 Fixpunkte (s.o.)

QA-P14 Centroid of the Morley Triangle

Kegelschnitt – Asymptoten senkrecht zu den Schenkeln von QL - DT – Punkte: H_L , Teilpunkt SO_L im Verhältnis 2:1, Teilpunkt SH_A im Verhältnis 1:2

$$(p^2c^2S_A + r^2(S^2 + S_B S_C))x^2 - (p^2(S^2 + S_A S_B) + r^2a^2S_C)z^2 + S_B(p^2c^2 - r^2a^2)y^2 - (p^2(S^2 + 2S_A^2) - r^2(S^2 + 2S_C^2))xz - (2p^2c^4 - r^2(S^2 + 2S_B^2))xy - (p^2(S^2 + 2S_B^2) - 2r^2a^4)yz = 0$$

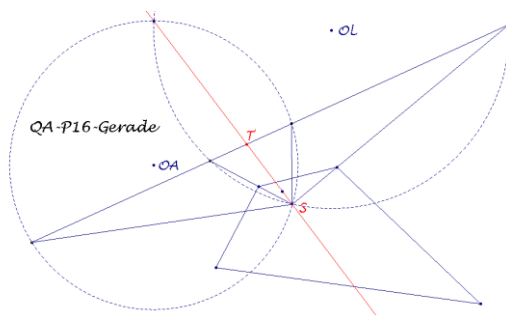
Zentrum: $Z_{QA-P14}(p^4c^2S_B + p^2r^2(2S^2 - S_B S_C) - r^4a^4$
 $: p^4c^2S_A + p^2r^2(3S^2 - S_A S_C) + r^4a^2S_C)$
 $: -p^4c^4 + p^2r^2(2S^2 - S_A S_B) + r^4a^2S_B)$



QA-P16 QA-Harmonic Center

Gerade: Radikal-Achse der Umkreise von $QA-DT$ und $QL-DT$. Schnitt T mit der Basisgeraden teilt mit M_A bzw. M_B die Basis von $QL-DT$ (bzw. $QA-DT$) harmonisch.

$$r^2x - p^2z = 0$$



QA-P18 Involutory Conjugate of QA-P19

Die Ortslinie ist das *QA-DT*-isotome Bild einer Ellipse durch folgende Punkte: $X_1 = S$, $X_2 = G_A$, X_3 Schnitt der Basisgeraden mit der Verbindungsgeraden *UV* der *QA-DT*-isotomen Bilder der Fernpunkte der *QL-DT*-Schenkel:

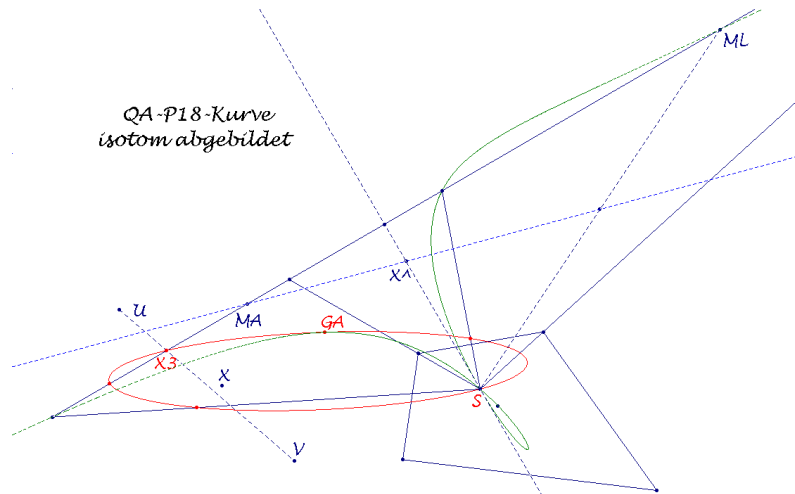
$$X_3\left(\frac{1}{p^2} : 0 : \frac{1}{r^2}\right).$$

Die weiteren drei Schnitte der Ellipse mit den *QA-DT*-Seitengeraden erhält man als Ecken eines *QA-DT*-Ceva-Dreiecks zu einem Punkt

$$X\left(\frac{1}{p^4} : \frac{1}{(p^2 - r^2)^2} : \frac{1}{r^4}\right),$$

dessen *QA-DT*-isotomes Bild der Schnitt einer Geraden durch S und die Spiegelung von X_3 an M_A und einer Geraden durch M_A durch die Mitte von SM_L ist.

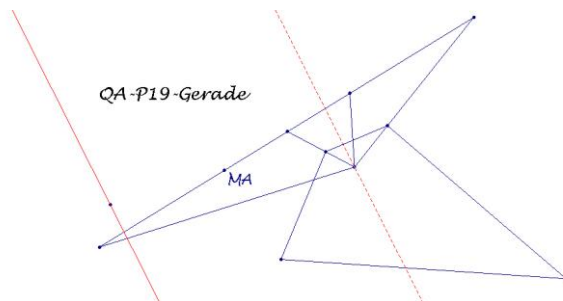
$$p^6 x^2 + r^6 z^2 - p^2(p^2 - r^2)^2 xy - p^2 r^2(p^2 + r^2) zx - r^2(p^2 - r^2)^2 yz = 0$$



QA-P19 Anticomplement of QA-P16 wrt QA-DT

Gerade – Spiegelung der Radikal-Achse der Umkreise von *QA-DT* und *QL-DT* (*QA-P16*-Gerade) an M_A

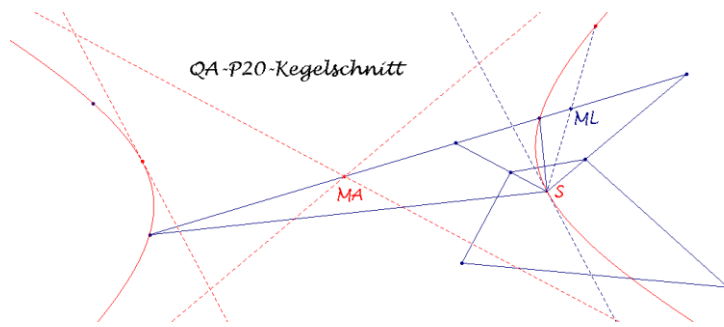
$$p^2 x + (p^2 - r^2) y - r^2 z = 0$$



QA-P20 Reflection of QA-P5 in QA-P1

Hyperbel – *QA-DT*-Umkegelschnitt als *QA-DT*-isotomes Bild der *QA-P19*-Geraden – Asymptoten parallel zu Schenkeln von *QL-DT* – Zentrum: M_A – Punkte: S , Spiegelung von S an M_L (Tangente in S ist die *QA-P16*-Gerade)

$$p^2(x+y)z - r^2(y+z)x = 0$$

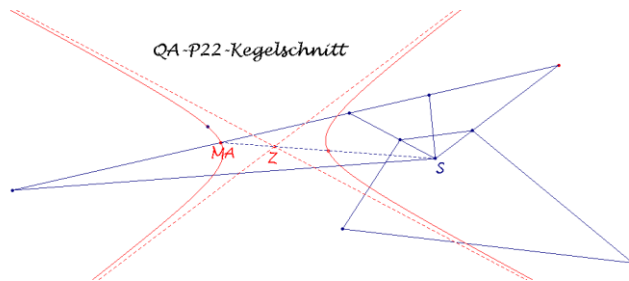


QA-P22 Midpoint of QA-P1 and QA-P20

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den Schenkeln des QL-DT –

Zentrum teilt SM_A im Verhältnis 3:1 – Punkte: M_A , Mitte SM_A

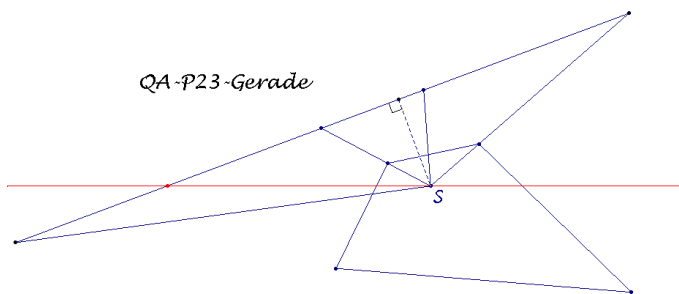
$$p^2(x+y-z)(x+y-3z) - r^2(-x+y+z)(-3x+y+z) = 0$$



QA-P23 Inscribed Square Axes Crosspoint

Gerade durch S , die die Basis von QL-DT im vierten harmonischen Punkt zum Höhenfußpunkt schneidet.

$$p^2S_A z - r^2S_C x = 0$$



QA-P24 Anticomplement of QA-P1 wrt the Morley Triangle

Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu den Schenkeln eines

Dreiecks über der QL-DT-Basis mit dem Scheitel

$$S'(a^2 : -2S_B : c^2) \quad (QL-DT-Koordinaten)$$

Zentrum: Schnitt einer Parallelen zu $O_A O_L$ durch S und einer

Senkrechten zu SM_L durch H_L ,

auch Teilpunkt $Z_{QA-P1} Z_{QA-P14}$ im Verhältnis $-3/2$,

auch Teilpunkt $G_A Z_{QL-P2}$ im Verhältnis $-4/3$,

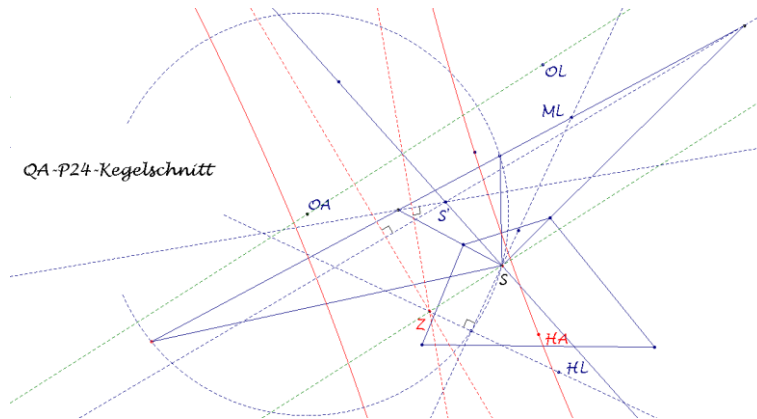
auch Teilpunkt $G_A Z_{QG-P5}$ im Verhältnis $-2/3$

(mit $G_A = Z_{QL-P12} = Z_{QG-P4}$)

Punkte: H_A

Anmerkung zur Konstruktion des Punktes S' : Dieser Punkt ist das QL - DT -isogonale Bild des vierten harmonischen Punktes auf SM_L zum zweiten Schnitt von SM_L mit dem QA - DT -Umkreis.

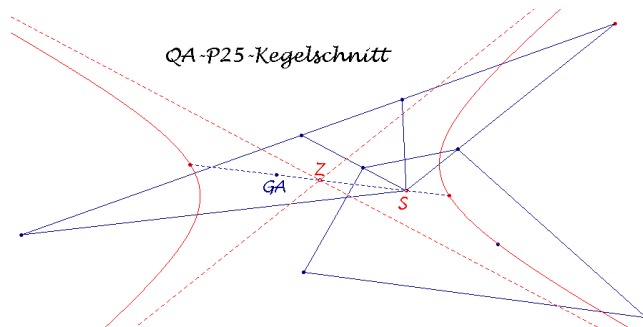
Die Gleichung sei hier unterdrückt.



QA-P25 1st QA-Quasi Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den QL - DT -Schenkeln –
 Zentrum teilt SG_A im Verhältnis 2:1 – Punkte: Teilpunkte SG_A in
 Verhältnissen $-1:4$ und $-5:2$

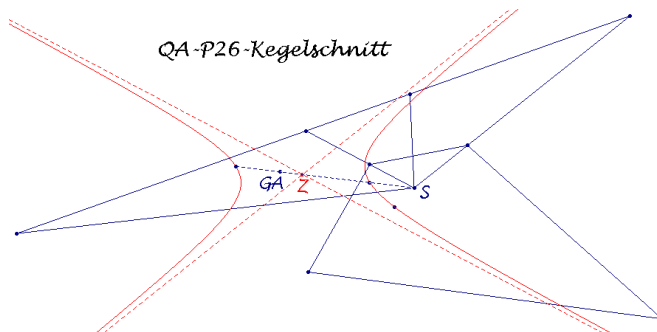
$$p^2(5x+5y-4z)(x+y+10z) - r^2(-4x+5y+5z)(10x+y+z) = 0$$



QA-P26 2nd QA-Quasi Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den QL - DT -Schenkeln –
 Zentrum teilt SG_A im Verhältnis 5:1 – Punkte: Teilpunkte SG_A in
 Verhältnissen 1:2 und $-4:1$

$$p^2(x+y-8z)(4x+4y-5z) - r^2(-5x+4y+4z)(-8x+y+z) = 0$$

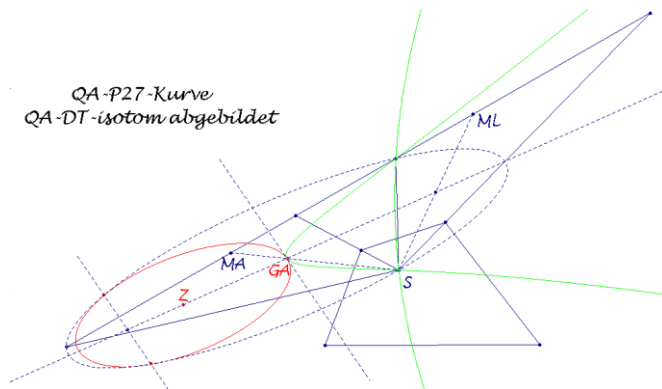


QA-P27 M3D Center

Die Ortslinie ist das *QA-DT*-isotome Bild eine Ellipse mit der Gleichung

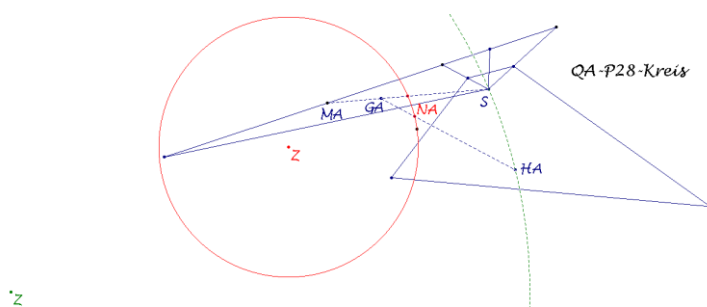
$$3p^4x^2 + 3(p^2 - r^2)y^2 + 3r^4z^2 + 2(p^2 - r^2)(p^2 + 2r^2)xy - 2(2p^4 - p^2r^2 + 2r^4)zx - 2(p^2 - r^2)(2p^2 + r^2)yz = 0.$$

Punkte: G_A und die *QA-DT*-isotomen Bilder der Fernpunkte der *QL-DT*-Schenkel (s. *QA-P3*) als Berührungspunkte mit der *QA-DT*-Steiner-Umellipse. Die gemeinsame Berührsehne ist parallel zur Tangente in G_A . Das Zentrum liegt auf der Verbindungsgeraden von G_A und der Mitte von SM_L .



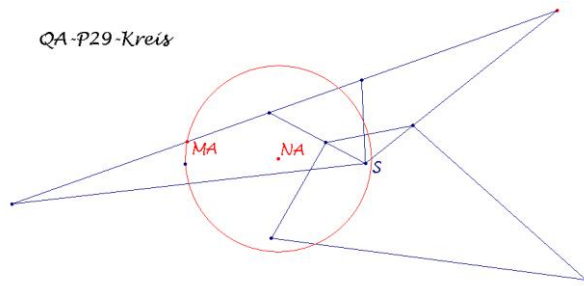
QA-P28 Midpoint of the Foci of the QA-Parabolas
Kreis – Streckung des *QA-P4*-Kreises mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ von G_A
– Punkte: N_A , Mitte SM_A

$$r^2a^2(2S_Ax(-3x + y + z) - S_B(x - 3y + z)(x - y + z) - S_C(x + y - 3z)(x + y - z)) + p^2c^2(S_A(-3x + y + z)(-x + y + z) + S_B(x - 3y + z)(x - y + z) - 2S_Cz(x + y - 3z)) = 0$$



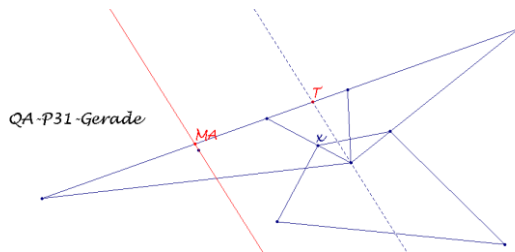
QA-P29 Complement of QA-P2 wrt QA-DT
Kreis – Neun-Punkte-Kreis von *QA-DT* (*QA-Ci2*)

$$S_Ax^2 + S_By^2 + S_Cz^2 - a^2yz - b^2zx - c^2xy = 0$$

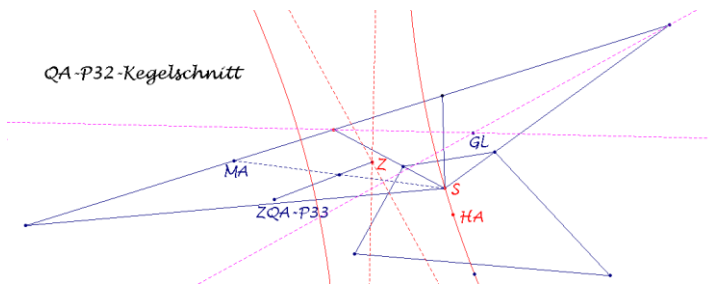


QA-P30 Reflection of QA-P2 in QA-P11
 Kreis – Umkreis von QA-DT (QA-Ci1)
 (s. QA-P2)

QA-P31 Complement of QA-P16 wrt QA-DT
 Gerade – Parallele durch M_A zur Radikal-Achse der Umkreise
 von QA-DT und QL-DT (s. QA-P16)
 $(p^2 + r^2)(x - z) + (p^2 - r^2)y = 0$



QA-P32 Centroid of the Circumcenter Quadrangle
 Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu den QL-DT-
 Seitenhalbierenden – Zentrum: Teilpunkt Mitte SM_A , Z_{QA-P33} im
 Verhältnis $-1:3$ – Punkte: S , H_A



QA-P33 Centroid of the Orthocenter Quadrangle
 Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu den QL-DT-Schenkeln-
 Punkte: S , Teilpunkt $H_A H_L$ im Verhältnis $-3:1$, Teilpunkt $H_A X$
 im Verhältnis $-3:1$ mit X Teilpunkt SO_L im Verhältnis $2:1$

$$r^2(S^2 + 2S_B S_C)x^2 - p^2(S^2 + 2S_A S_B)z^2$$

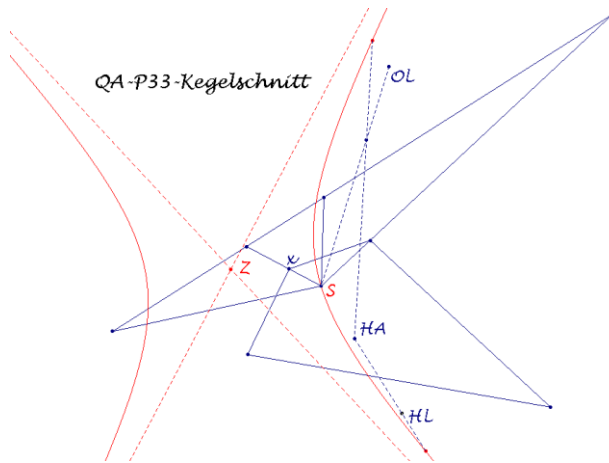
$$+ (r^2(S^2 + 2a^2 S_B) - 2p^2 c^4)xy - (p^2(S^2 + 2c^2 S_B) - 2r^2 a^4)yz$$

$$- (p^2(S^2 + 2c^2 S_A) - r^2(S^2 + 2a^2 S_C))zx = 0$$

Zentrum:

$$(p^4 c^2 S_B + p^2 r^2 (2S^2 - 3S_B S_C) - r^4 a^4 : p^4 c^2 S_A + 3p^2 r^2 b^2 S_B + r^4 a^2 S_C$$

$$- p^4 c^4 + p^2 r^2 (2S^2 - 3S_A S_B) + r^4 a^2 S_B)$$

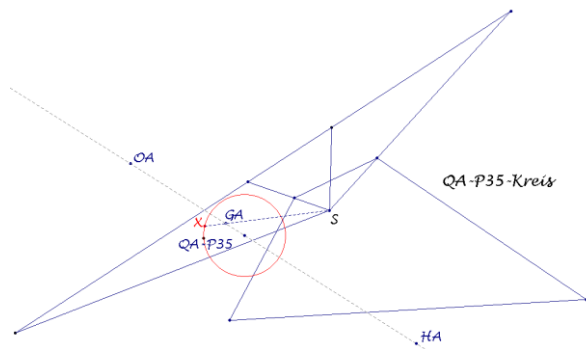


QA-P35 1st Penta-Point

Kreis – Mitte: Teilpunkt $H_A O_A$ im Verhältnis 3:2 –

Punkt X: Teilpunkt $S G_A$ im Verhältnis -6:1

$$2(6S_A + a^2)x^2 + 2(6S_B + b^2)y^2 + 2(6S_C + c^2)z^2 + (4S_A - 11a^2)yz + (4S_B - 11b^2)zx + (4S_C - 11c^2)xy = 0$$

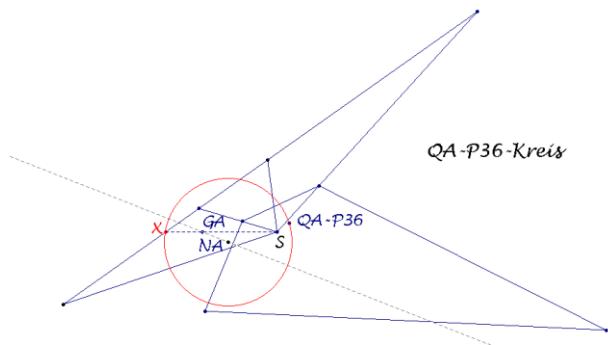


QA-P36 Complement of QA-P30 wrt the QA-DT

Kreis – Mitte N_A –

Punkt X: Teilpunkt $S G_A$ im Verhältnis -3:1

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy = 0$$



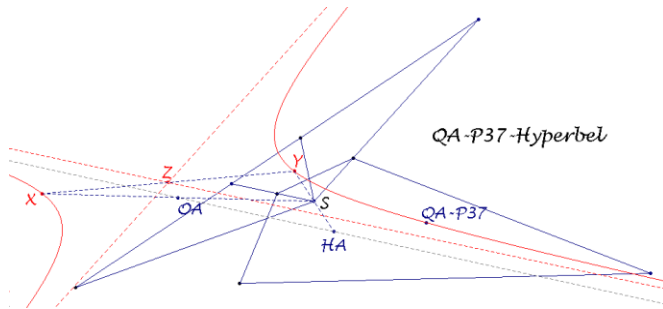
QA-P37 Reflexion of QA-P12 in QA-P1

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den $QL-DT$ -Schenkeln –

Punkt X: S an O_A gespiegelt, Punkt Y: H_A an S gespiegelt –

Zentrum Z: Mitte XY

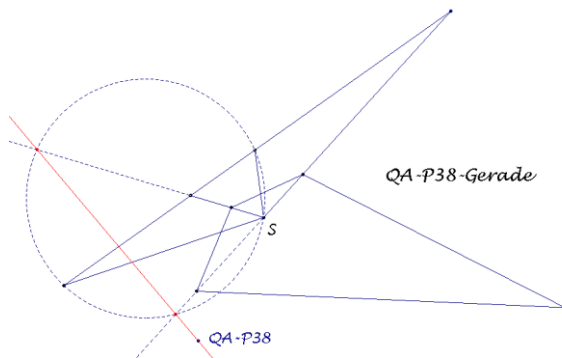
$$p^2(S^2z - c^2S_C(x+y+z))(S^2z + S_A S_B(x+y+z)) - r^2(S^2x - a^2S_A(x+y+z))(S^2x + S_B S_C(x+y+z)) = 0$$



QA-P38 Montesdeoca-Hutson Point

Gerade – Punkte: Schnitte der QL - DT -Schenkelgeraden mit dem QA - DT -Umkreis

$$a^2b^2r^2x + (a^4r^2 - c^4p^2)y - b^2c^2p^2z = 0$$



Ortslinien von QL -Punkten

Bezugsdreieck sei jetzt das Diagonalen-Dreieck QL - DT . Variiert man den Koeffizienten m der Seitengeraden $L_4(l:m:n)$, so haben alle zugehörigen Vierecke das gleiche Diagonal-Dreieck QA - DT und das gleiche Diagonalen-Dreieck QL - DT . Dabei bleiben die folgenden Punkte fest:

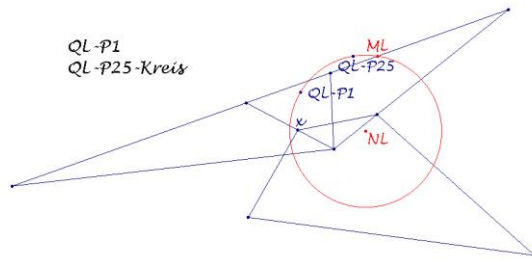
$$\begin{aligned} &S(0:1:0), \quad M_L(1:0:1), \quad M_A(-n^2:0:l^2), \\ &G_L(1:1:1), \quad G_A(-2n^2:l^2-n^2:2l^2), \\ &O_L(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C), \quad O_A(n^2(S^2 + S_A S_B) + l^2a^2S_C \\ &\quad : b^2(n^2c^2 - l^2a^2) : -l^2(S^2 + S_B S_C) - n^2c^2S_A), \\ &H_L(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B), \quad H_A(S_C : \frac{-n^2S_A^2 + l^2S_C^2}{n^2c^2 - l^2a^2} : S_A), \\ &N_L(S^2 + S_B S_C : S^2 + S_C S_A : S^2 + S_A S_B), \\ &N_A(S^2 + 2S_B S_C : 2S_A S_C : S^2 + 2S_A S_B). \end{aligned}$$

Berücksichtigt werden Punkte bis QL - $P26$.

QL-P1 Miquel Point

Kreis – Neun-Punkte-Kreis von QL - DT (QL - $Ci2$)

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy = 0$$

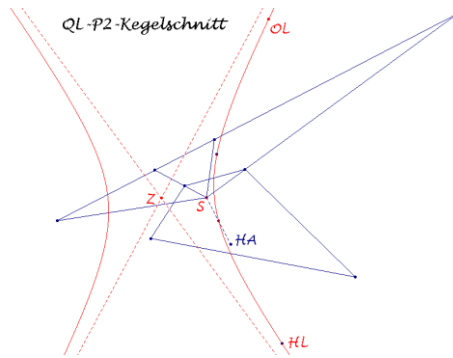


QL-P2 Morley Point

Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu den $QL-DT$ -Schenkeln –
 Punkte: O_L , H_L , Mitte SH_A

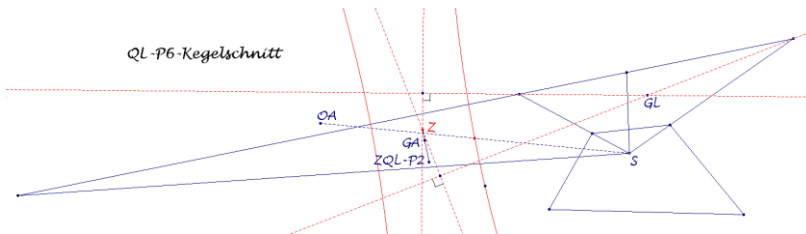
$$l^2 S_A (S_B - S_C) x^2 + S_B (l^2 a^2 - n^2 c^2) y^2 + n^2 S_C (S_A - S_B) z^2 - (l^2 (S_A a^2 + S_B (S_B - S_C)) - n^2 S_B c^2) xy + (l^2 S_A a^2 - n^2 S_C c^2) zx - (l^2 S_B a^2 - n^2 (S_C c^2 + S_B (S_B - S_A))) yz = 0$$

Zentrum $Z_{QL-P2} (n^2 (S^2 - S_B^2) - l^2 a^2 S_B$
 $: n^2 c^2 S_C - l^2 a^2 S_A : -l^2 (S^2 - S_B^2) + n^2 c^2 S_B)$



QL-P6 Dimidium Point

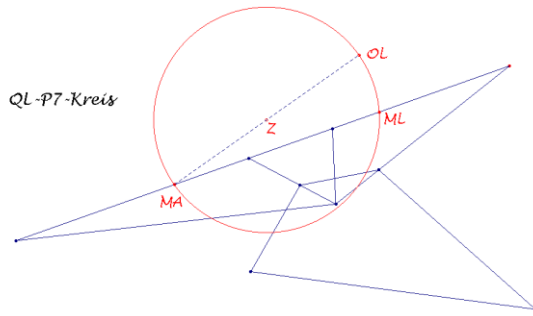
Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu den $QL-DT$ -
 Seitenhalbierenden – Zentrum: Teilpunkt $G_A Z_{QL-P2}$ im
 Verhältnis $-1:3$ – Punkt: Mitte SO_A
 Die Gleichung sei hier unterdrückt.



QL-P7 Newton-Steiner Point

Kreis – Thales-Kreis über $M_A O_L$ – Punkte: M_A , M_L , O_L

$$b^2 (z - x) (l^2 x + n^2 z) + (n^2 c^2 - l^2 a^2) y^2 + (l^2 (c^2 - 2S_C) - n^2 c^2) xy + (l^2 a^2 - n^2 (a^2 - 2S_A)) yz = 0$$

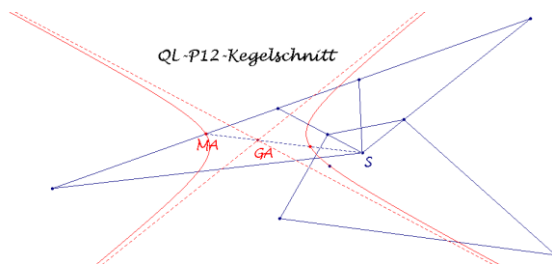


QL-P8, QL-P9, QL-P10, QL-P11 Fixpunkte

QL-P12 Lateral Centroid

Hyperbel – Zentrum: G_A – Asymptoten: Parallelen zu den Schenkeln von $QL-DT$ – Punkte: M_A , Mitte SG_A

$$2(l^2x + n^2z)^2 - l^2n^2(x^2 - y^2 + z^2) + l^4(2y - z)x + n^4(2y - x)z = 0$$



QL-P13 Lateral Harmonic Center

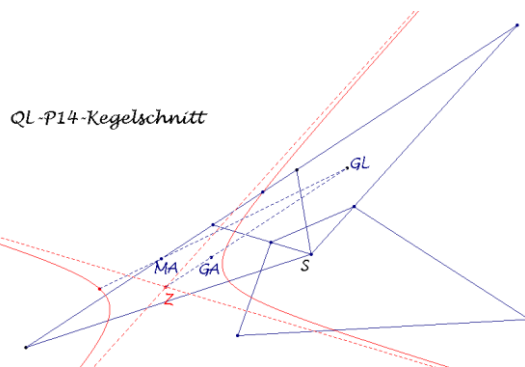
Gerade – Radikal-Achse der Umkreise von $QA-DT$ und $QL-DT$ (s. $QA-P16$)

$$l^2x - n^2z = 0$$

QL-P14 1st QL-Quasi Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den $QL-DT$ -Schenkeln – Zentrum teilt $G_A G_L$ im Verhältnis $-1:4$ – Punkt: Teilpunkt $M_A G_L$ im Verhältnis $-1:4$

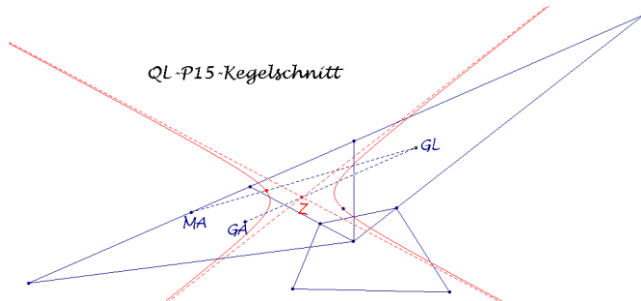
$$\begin{aligned} & -2(-35l^4 + 10l^2n^2 + n^4)x^2 + (7l^4 + 34l^2n^2 + 7n^4)y^2 \\ & - 2(l^4 + 10l^2n^2 - 35n^4)z^2 + (5l^4 + 14l^2n^2 + 77n^4)yz \\ & - (13l^4 - 122l^2n^2 + 13n^4)zx + (77l^4 + 14l^2n^2 + 5n^4)xy = 0 \end{aligned}$$



QL-P15 2nd QL-Quasi Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den *QL-DT*-Schenkeln –
Zentrum teilt $G_A G_L$ im Verhältnis 1:2 – Punkte: Teilpunkt $M_A G_L$
im Verhältnis 1:2

$$4(10l^4 - 8l^2n^2 + n^4)x^2 - 5(l^4 - 22l^2n^2 + 5n^4)y^2 + 4(l^4 - 8l^2n^2 + 10n^4)z^2 - (l^4 + 10l^2n^2 - 35n^4)yz - (37l^4 - 98l^2n^2 + 37n^4)zx - (-35l^4 + 10l^2n^2 + n^4)xy = 0$$

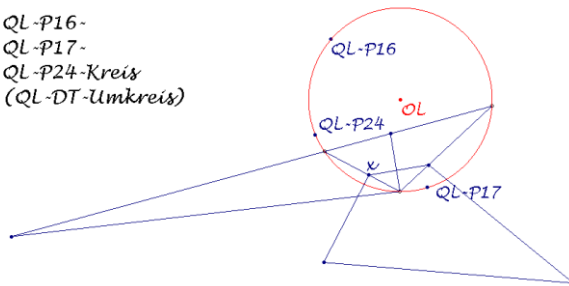


QL-P16 QL-Quasi Circumcenter

Kreis – Umkreis von *QL-DT* (*QL-Ci1*)

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

QL-P16-
QL-P17-
QL-P24-Kreis
(*QL-DT*-Umkreis)



QL-P17 QL-Adjunct Quasi Circumcenter

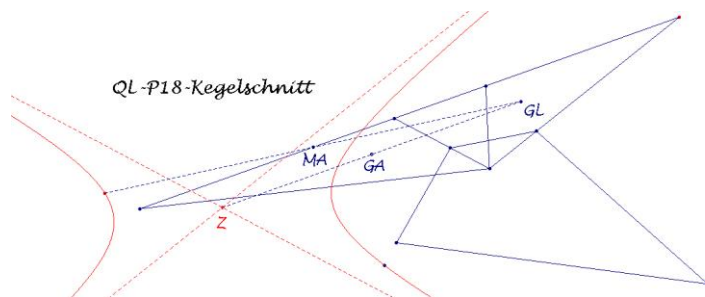
Kreis – Umkreis von *QL-DT* (*QL-Ci1*)

(s. *QL-P16*)

QL-P18 Reflection of *QL-P8* in *QL-P12*

Hyperbel – Asymptoten parallel zu *QL-DT*-Schenkeln –
Zentrum: Spiegelung von G_L an G_A – Punkt: Spiegelung von G_L
an M_A

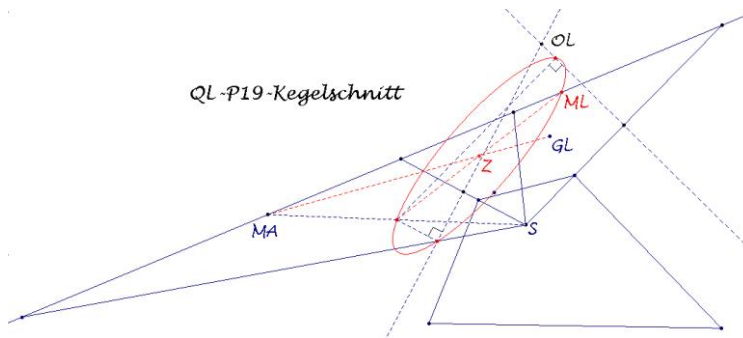
$$4l^4x^2 + (l^2 + n^2)y^2 + 4n^4z^2 + (l^4 + 2l^2n^2 + 5n^4)yz + (l^4 + 6l^2n^2 + n^4)zx + (5l^4 + 2l^2n^2 + n^4)xy = 0$$



QL-P19 Midpoint of QL-P1 and QL-P7

Ellipse – Zentrum: Teilpunkt $M_A G_L$ 3:1 – Punkte: M_L , Mitte $S M_A$, Fußpunkte der Lote von der Mitte $S M_A$ auf die Mittelsenkrechten der $QL-DT$ -Schenkel

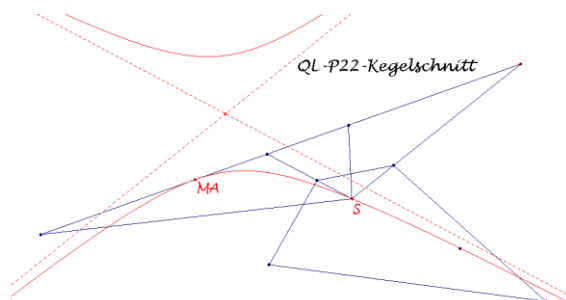
$$n^6 c^2 (-x + y + z)^2 - l^6 a^2 (x + y - z)^2 + l^2 n^4 (-x + y + z)(2S_A x + S_B(3x + y - 3z)) - l^4 n^2 (x + y - z)(2S_C z + S_B(-3x + y + 3z)) = 0$$



QL-P23 Center of the Inscribed Midline Hyperbola

Hyperbel – Asymptoten parallel zu den $QL-DT$ -Schenkeln – Punkte: S, M_A – Tangente in M_A ist die Basisgerade

$$l^4 (x + y)x + 2l^2 n^2 xz + n^4 (y + z)z = 0$$



QL-P24 Intersection QL-P1.QL-P8^QL-P13.QL-P17

Kreis – Umkreis von $QL-DT$ ($QL-Ci1$)
(s. $QL-P16$)

QL-P25 2nd QL-Parabola Focus

Kreis – Neun-Punkte-Kreis von $QL-DT$ ($QL-Ci2$)
(s. $QL-P1$)

Ortslinien von QG-Punkten

Für QG-Punkte lässt sich sowohl das Diagonal-Dreieck $QA-DT$ als auch das Diagonalen-Dreieck $QL-DT$ als Bezugsdreieck wählen. Hier sei das Diagonal-Dreieck $QA-DT$ bevorzugt.

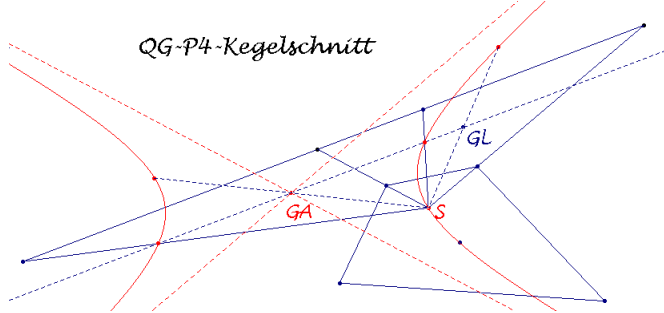
Berücksichtigt werden Punkte bis $QG-P14$.

QG-P1, QG-P2, QG-P3 Fixpunkte

QG-P4 1st QG-Quasi Centroid

Hyperbel – Asymptoten parallel zu $QL-DT$ -Schenkeln –
 Zentrum G_A – Punkte: S , Spiegelungen von S an G_A bzw. G_L –
 $QA-DT$ -Schenkelschnitte auf $G_A G_L$.

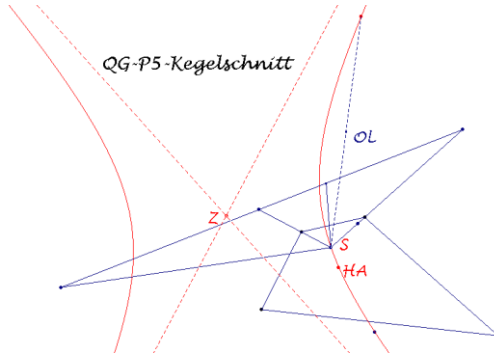
$$r^2 x^2 - p^2 z^2 - 2r^2 xy + 2(p^2 - r^2)zx + 2p^2 yz = 0$$



QG-P5 1st QG-Quasi Circumcenter

Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu $QL-DT$ -Schenkeln –
 Punkte: S, H_A , Spiegelung von S an O_L .

$$\begin{aligned} & -(p^2 c^2 - r^2 a^2)(S_A x^2 + S_C z^2) \\ & + (p^2 c^2(S_B + c^2) + r^2(a^2 S_A - 2S_B^2))xy \\ & - (p^2(S^2 - S_A^2) - r^2(S^2 - S_C^2))zx \\ & - (r^2 a^2(S_B + a^2) + p^2(c^2 S_C - 2S_B^2))yz = 0 \end{aligned}$$



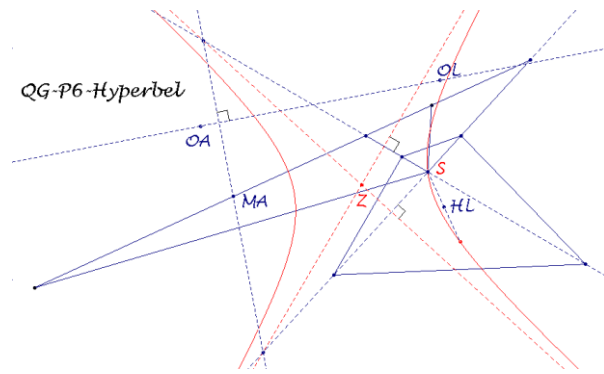
QG-P6 1st Quasi Orthocenter

Hyperbel – Asymptoten senkrecht zu $QL-DT$ -Schenkeln; sie
 schneiden den Schenkel, zu dem sie nicht senkrecht sind, auf
 einer Senkrechten zu $O_A O_L$ durch M_A – Punkte: S , Spiegelung
 von S an H_L

$$\begin{aligned} & (p^2 c^2 S_B - r^2(S^2 + a^2 S_B))x^2 - (r^2 a^2 S_B - p^2(S^2 + c^2 S_B))z^2 \\ & + (p^2 c^2 - r^2 a^2)((a^2 + S_B)yz + (a^2 + c^2)zx + (c^2 + S_B)xy) = 0 \end{aligned}$$

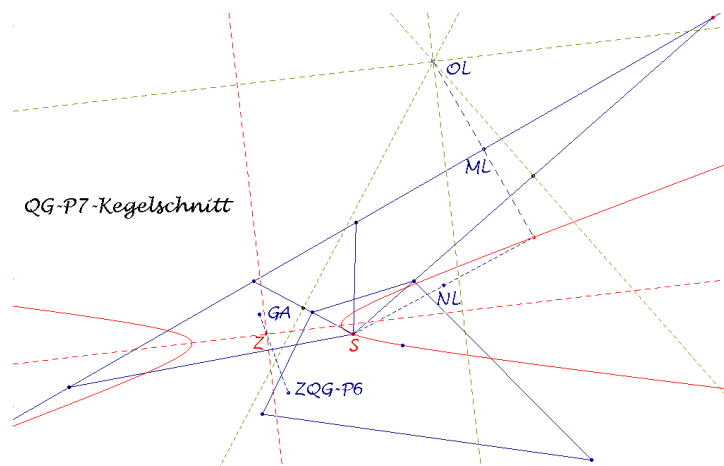
Zentrum $Z_{QG-P6}((p^2 c^2 - r^2 a^2)(p^2 S_B + r^2 a^2)$

$$: p^4 c^2 S_A + p^2 r^2 b^2 S_B + r^4 a^2 S_C : -(p^2 c^2 - r^2 a^2)(r^2 S_B + p^2 c^2))$$



QG-P7 1st QG-Quasi Nine-point Center

Kegelschnitt – Achsen: Winkelhalbierende der QL - DT -Schenkel-Mittelsenkrechten – Zentrum: Teilpunkt $G_A Z_{QG-P6}$ im Verhältnis 1:3 – Punkte: S , Spiegelung von S an N_L (oder Spiegelung von O_L an M_L)
Die Gleichung sei hier unterdrückt.



Die Punkte $QG-P4, 5, 6, 7$ und $QG-P8, 9, 10, 11$ liegen jeweils in Euler-Anordnung kollinear. Das erste Quadrupel hat eine Trägergerade mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & (p^4 c^2 (S_A + c^2) + r^2 (S_B - S_C) (p^2 S_A - r^2 a^2)) x \\ & + (r^2 a^2 - p^2 c^2) (p^2 (c^2 + S_B) + r^2 (a^2 + S_B)) y \\ & - (r^4 a^2 (S_C + a^2) + p^2 (S_B - S_A) (r^2 S_C - p^2 c^2)) z = 0 \end{aligned}$$

Das zweite Quadrupel erhält man aus dem ersten durch zentrische Streckung vom Scheitel mit dem Faktor $1/2$. Dies überträgt sich auch auf die Zentren der Orts-Kegelschnitte, so dass man die Ortslinien zu den Punkten $QG-P8, 9, 10, 11$ durch zentrische Streckung vom Scheitel mit Faktor $1/2$ erhält.

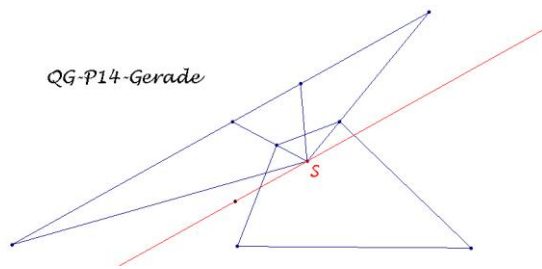
QG-P12 Inscribed Harmonic Conic Center

Radikal-Achse der Umkreise von QA - DT und QL - DT
(s. $QA-P16$)

QG-P13 Circumscribed Harmonic Conic Center

Radikal-Achse der Umkreise von QA - DT und QL - DT
(s. $QA-P16$)

QG-P14 Center of the $M3D$ Hyperbola
Gerade – Parallele zur Basisgeraden durch den Scheitel S .
 $x + z = 0$



Literatur

- [1] Chris van Tienhoven: Encyclopedia of Quadri-Figures. –
<http://www.chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia.html>.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
<http://eckartschmidt.de>
eckart_schmidt@t-online.de